

**HOJA 2: ESPACIOS VECTORIALES****Espacios, Subespacios Vectoriales y Dependencia Lineal**

1) En el conjunto  $R^2$  se definen las siguientes operaciones

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad a * (a_1, a_2) = (a * a_1, 0)$$

¿Es  $R^2$  un espacio vectorial sobre  $R$  respecto de las citadas operaciones?

2) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales?

- |  |   |
|--|---|
| a) $S = \{(x, y, z) \in R^3; y = 0\}$          | b) $S = \{(x, y, z) \in R^3; x + y + z = 0\}$                 |
| c) $S = \{(x, y, z) \in R^3; x + z = 1\}$      | d) $S = \{(x, y, z) \in R^3; x + z = 0\}$                     |
| e) $S = \{(x, y, z) \in R^3; x + z \leq 0\}$   | f) $S = \{(x, y, z) \in R^3; xy = 0\}$                        |
| g) $S = \{(a, b, 1); a, b \in R\}$             | h) $S = \{(a, b, 0); a, b \in R\}$                            |
| i) $S = \{(a, b, c) \in R^3; 3a = a + b + c\}$ | j) $S = \{p(x) \in P_3(R); p(x) = x^3 + ax + b, a, b \in R\}$ |
| k) $S = \{p(x) \in P_3(R); 3p(0) = p(1)\}$     | l) $S = \{p(x) \in P_3(R); p(x) = ax^3 + b, a, b \in R\}$     |

3) Estudie si los siguientes conjuntos de vectores de  $R^3$  son linealmente independientes:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$              | b) $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$                   |
| c) $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ | d) $\{(1, 0, 1), (2, 0, 1)\}$                              |
| e) $\{(0, 1, 0), (1, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$            | f) $\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 0)\}$                   |
| g) $\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$              | h) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (a, 0, 1)\}, a \in \mathbb{R}$ |

4) ¿Para qué valores de  $a$  el conjunto  $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}\right\}$  es linealmente dependiente?

5) Determine si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente dependientes. En caso afirmativo, determine una relación de dependencia y un subconjunto con un número máximo de vectores l.i.

- a)  $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (0, -1, 1)\}$   
 b)  $\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (0, 1, 1, 1), (2, 2, 4, 2)\}$   
 c)  $\{(1, 3, 4), (4, 0, 1), (3, 1, 2)\}$

6) Averigüe si los vectores  $a = (1, -1, 0)$  y  $b = (2, -3, 1)$  pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores  $\{v_1 = (2, 5, 1), v_2 = (3, 4, 1), v_3 = (5, 9, 2)\}$ .

7) Demuestre que los conjuntos  $A = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  y  $B = \{(2, 1, -1), (1, 2, 1)\}$  de vectores de  $R^3$  generan el mismo subespacio vectorial de  $R^3$ . Demuestre que el conjunto  $C = \{(2, 1, -1), (1, -1, 0)\}$  no genera dicho subespacio.

8) En  $R^4$  se considera el subespacio generado por los dos vectores  $(2, 3, 1, -5), (0, 2, -1, 3)$ . Determine el valor de los escalares  $p$  y  $q$  para los que el vector  $(2, p, 3, -q)$  pertenece al citado subespacio.

**Base de un espacio vectorial**

9) Halle una base del espacio vectorial generado por el siguiente conjunto de vectores

$$\{v_1 = (3, 2, 0, 5), v_2 = (-1, 0, 3, -4), v_3 = (2, 2, 3, 1), v_4 = (0, 2, -9, 17)\}.$$

10) ¿Para qué valores del número real  $a$  es base de  $\mathbb{R}^3$  el conjunto  $\{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ ?

Halle las coordenadas del vector  $(-1, 1, 3)$  respecto del citado conjunto de vectores para  $a = 2$ .

11) En  $\mathbb{R}^4$  se consideran los vectores  $(1+a, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1+a, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1+a, 1)$  y  $(1, 1, 1, 1+a)$ . Determine según los valores del parámetro  $a$  la dimensión y una base del subespacio vectorial que generan.

12) Demuestre que los vectores  $\{(1,0,0,0), (1,-1,0,0), (1,-2,1,0), (1,-3,3,-1)\}$  forman una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$ . Obtenga las coordenadas del vector  $(2,-3,1,2)$  respecto de la base anterior.

13) En  $\mathbb{R}^3$  se considera el conjunto  $\{(1,0,0), (3,1,0), (9,6,1)\}$ . Pruebe que es base de  $\mathbb{R}^3$  y calcule las coordenadas del vector  $(a,b,c)$  respecto de dicha base.

14) Estudie si el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^4$  y en caso afirmativo obtenga una base: a)  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

15) Dado el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^5$  de las soluciones del sistema:  $\begin{cases} x + 2y - 3z + w = 0 \\ x + 2y + z - 4t - w = 0 \\ y + z - 2t - w = 0 \\ x + z - 2t - 3w = 0 \end{cases}$ , obtenga un sistema de generadores, una base y la dimensión del citado subespacio

16) En  $\mathbb{R}^3$  se consideran  $S_1 = \{(x, y, z) / x = -z\}$  y  $S_2 = \{(x, y, z) / x = z - y\}$ .

a) Pruebe que  $S_1$  y  $S_2$  son subespacios de  $\mathbb{R}^3$ .

b) Encuentre una base  $B_1$  de  $S_1$ . Calcule las coordenadas del vector  $(x, y, z) \in S_1$  respecto de  $B_1$ .

c) Pruebe que  $B_2 = \{(0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$  es base de  $S_2$ .

Encuentre las coordenadas de  $(-2, 1, -1) \in S_2$  respecto de  $B_2$ .

17) Halle una base y la dimensión del subespacio vectorial  $M$  definido de la siguiente forma:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b + 3c & 2a - b \\ -a - c & a + 2b + 5c \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

18) En  $\mathbb{R}^3$  se consideran los vectores  $\{u = (1, 1, 1), v = (2, 3, 2), w = (a^2 - 8, -1, 1), m = (a, 4, 3)\}$ , y el subespacio  $S_a$ , generado por  $\{u, v, w\}$ .

a) Estudie, según los valores de  $a$ , los casos en los que  $m \in S_a$ .

b) Para los diferentes valores de  $a$  obtenidos, halle una base de  $S_a$ .

c) Para cada caso en que  $m \in S_a$ , calcule las coordenadas de  $m$  respecto de la base obtenida en el apartado anterior.

**Suma e intersección de subespacios**

19) Sean  $S$  y  $T$  subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  definidos por

$$S = L\{(1, 0, 1, 1), (1, -1, -1, 0), (0, 1, 2, 1)\}, \quad T = \{(x, y, z, t) / x - z - t = 0, \quad y + z = 0\}$$

Obtenga una base de los subespacios  $S + T$  y  $S \cap T$ . Escriba las ecuaciones paramétricas e implícitas para los subespacios citados anteriormente.

20) En  $\mathbb{R}^4$  se consideran los subconjuntos:

$$S = \{(x, y, z, t) / x - y + z - t = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{(x, y, z, t) / x = 2b, y = a + b, z = b, t = a, a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Pruebe que  $S$  y  $T$  son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$ .
- Obtenga las ecuaciones implícitas y paramétricas de  $S$  y  $T$ .
- Calcule  $S \cap T$  y  $S + T$ .

21) Sean  $S$  y  $T$  subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  definidos por

$$S = L\{(1, 1, -1, 2), (1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 3)\}, \quad T = L\{(1, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 1), (3, 0, -4, 3)\}$$

- Obtenga las ecuaciones implícitas de  $S + T$ .
- Obtenga una base del subespacio  $S \cap T$ .
- Calcule un suplementario de  $T$  en  $\mathbb{R}^4$ .

22) Se consideran los subespacios de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ :  $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$  y  $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix} / c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$ .

Halle una base de los espacios  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_1 + V_2$ ,  $V_1 \cap V_2$ .

23) Sean  $U$  y  $W$  los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$  definidos por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}, \quad W = L\{(0, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 2)\}.$$

Obtenga una base y la dimensión de los subespacios  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$  y  $U + W$ .

24) Sean  $S$  y  $T$  los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  definidos por

$$S = \{(x, y, z, t) / x + y + z + t = 0, \quad 2x - y + 2z - t = 0, \quad 4x + y + 4z + t = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z, t) / x = a + b + 2c, \quad y = b + c, \quad z = -a + b, \quad t = 3b + 3c\}$$

Obtenga una base y la dimensión de  $S$ ,  $T$ ,  $S + T$  y  $S \cap T$ .

25) Dados los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$ :

$$S = L\{(1, 0, 2, -1), (0, -1, 2, 0), (2, -1, 6, -2)\} \quad \text{y} \quad T = L\{(1, -1, 4, -1), (1, 0, 0, 1), (-1, -2, 2, 1)\}.$$

Demuestre que  $\dim(S + T) = 3$  y  $\dim(S \cap T) = 2$ .

26) Para cada  $a \in \mathbb{R}$  se considera el subespacio vectorial

$$V(a) = L\{(1, a, 1, 1), (1, a, 1 - a, 0), (0, 1, 2a, 2), (1, 1 + a, 1 + a, 2)\}$$

- Halle una base de  $V(a)$ .
- Estudie si el vector  $(1, 1 + a, 1 + 2a, a + 3) \in V(a)$  para algún  $a \in \mathbb{R}$ .
- Obtenga las dimensiones de los subespacios  $V(0) + V(1)$  y  $V(0) \cap V(1)$ .

**Suma directa de subespacios**

26) En  $\mathbb{R}^3$  se consideran los subespacios:

$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z\}$ ,  $V = \{(0, 0, c) / c \in \mathbb{R}\}$  y  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ . Pruebe que: a)  $\mathbb{R}^3 = U + V$ , b)  $\mathbb{R}^3 = V + W$ , c)  $\mathbb{R}^3 = U + W$  ¿En qué casos la suma es directa?

27) Se consideran los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$ :

$S = L\{(1, 0, 1), (1, 1, -1), (2, 1, 0)\}$  y  $T = L\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (3, 0, -1)\}$ .

Halle un subespacio  $U$  tal que  $\mathbb{R}^3 = S \oplus U$  y la suma  $T + U$  no sea directa.

28) Estudie si la suma de los subespacios vectoriales

$S_1 = L\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 2), (0, -1, 2, -2)\}$  y  $S_2 = L\{(1, 1, 1, 0), (-1, -1, 1, -2)\}$  de  $\mathbb{R}^4$  es directa. Halle una base del subespacio suma.

29) Sean los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$ :

$V = L\{(1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 2, -1, 3), (2, 0, 3, 0)\}$  y  $W = L\{(1, 0, 3, -1), (1, 4, 1, -1), (0, 2, -1, 0)\}$ . Demuestre que  $W \subset V$  y halle un subespacio suplementario de  $W$  en  $V$ .

30) Halle una base del subespacio vectorial  $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$  de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

Amplíe la base obtenida hasta formar una base de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Halle a continuación un subespacio suplementario de  $F$ .